Kostenlose Webanwendung zur Vorauslegung von Pumpenlaufrädern mit Meridianschnitt und Schaufelprojektionen

Vom Betriebspunkt zur exportierbaren Geometrie für CAD nach Gülich

Homam Alhelwani — H.M.E-Alhelwani Ingenieurbüro — Aachen

Ausführliche Fassung mit Rechenanhang

Die Geometrie eines Pumpenlaufrads beginnt mit einem vorgegebenen Betriebspunkt. Förderstrom, Förderhöhe und Drehzahl müssen mit Eintritts- und Austrittsdurchmessern, Kanalbreiten, Schaufelwinkeln und Meridianschnitt verknüpft werden. Um diese Rechenkette leichter nachvollziehbar zu machen, habe ich in meinem H.M.E-Alhelwani Ingenieurbüro in Aachen eine kostenlose Webanwendung entwickelt. Sie verbindet hydraulische Vorrechnungen mit der Erzeugung einer Laufradgeometrie und den zugehörigen Exportdateien.

Beschreibung und Zugang zur Anwendung: Pumpenlaufräder auf der Website des Ingenieurbüros

Der Rechenweg orientiert sich an **Centrifugal Pumps** von **Johann Friedrich Gülich**, **zweite englischsprachige Auflage, Springer, 2010**. Dieser Beitrag verfolgt die Rechnung vom Betriebspunkt zur Laufradgeometrie und unterscheidet zwischen den Beziehungen des Referenzwerks und den Entscheidungen für das Beispiel. [1]

Die Anwendung berechnet Laufradabmessungen und Schaufelwinkel am Eintritt an Nabe und Deckscheibe, erzeugt Meridianschnitt und Schaufelprojektionen und exportiert DXF-Dateien, CSV-Tabellen und Rechenberichte. Die Ergebnisse dienen als Ausgangspunkt für die Weiterbearbeitung im CAD, die Prüfung der Annahmen oder eine anschließende Strömungsuntersuchung.

Die Anwendung ist als **öffentliche Beta-Version** verfügbar. Sie richtet sich an Ingenieure und Konstrukteure aus der Pumpen- und Strömungsmaschinentechnik sowie an Lehrende und Studierende, die den Zusammenhang zwischen Berechnung und Geometrie nachvollziehen möchten. Ich lade dazu ein, eigene Auslegungsfälle zu erproben und Rückmeldungen zu Berechnungen, Eingabedefinitionen, Warnungen sowie Zeichnungen und Exportdateien zu geben.

Das Beispiel zeigt eine Anwendung der Methodik nach Gülich auf die Laufradvorauslegung. Es soll den Rechenablauf und dessen Übertragung in Geometrie erläutern. Die Anwendung wird derzeit an mehreren Auslegungsfällen erprobt; fachliche Prüfung und Verbesserungsvorschläge sind willkommen. [2]

Einsatzbereich und feste Modellannahmen

Die aktuelle Version behandelt geschlossene, einflutige Radiallaufräder mit axialem Eintritt und rückwärts gekrümmten Schaufeln für Wasser und ähnliche Flüssigkeiten. Vorausgesetzt wird eine inkompressible, einphasige Strömung. Die Ergebnisse umfassen außerdem vereinfachte Abschätzungen einiger Wellen- und Nabenabmessungen.

Die erzeugte Laufradgeometrie ist eine Vorauslegung und muss geprüft und verbessert werden. Ihre Eignung hängt von der Erfahrung des Konstrukteurs und der Abstimmung der Parameter ab: Austrittswinkel, Austrittsbreite, Schaufelzahl, angenommene Wirkungsgrade sowie die Bewertung des berechneten Außendurchmessers und der Strömungskanäle. Automatisches Rechnen und Zeichnen allein gewährleisten kein Laufrad, das die geforderte Leistung erreicht. Eindimensionale Verfahren beschreiben die örtliche Strömung nur begrenzt; Parameterabstimmung, Kanal- und Schaufelgestaltung und Konstruktionserfahrung beeinflussen die hydraulische Qualität. [3]

Für die Entwicklung einer realen Pumpe wird die Geometrie durch CFD untersucht, auf Grundlage der Ergebnisse angepasst und in weiteren Simulationsschleifen verbessert. Dabei sind sowohl die angestrebten Leistungs- und Betriebsbedingungen als auch Konvergenz und Zuverlässigkeit der Rechnung zu prüfen. Numerische Konvergenz allein beweist kein optimales Design. Anschließend wird ein Prototyp gefertigt und geprüft; die Messergebnisse können weitere Änderungen erforderlich machen. So führt der Weg von der Vorauslegung über die numerische Prüfung und Verbesserung zum praktischen Versuch. [3]

Eine vollständige Pumpenkonstruktion erfordert zudem die Auslegung von Gehäuse, Festigkeit, Lagern, Abdichtung und Fertigung sowie die Bewertung des Betriebs über den Kennlinienbereich.

Die Zahl der Saugaugen ist nach Gülich **f_q = 1**, da die Anwendung einflutige Laufräder behandelt. Gemeint ist die Zahl der Laufradeintritte, nicht die Zahl der Kanäle zwischen den Schaufeln. [4]

Der Rechenansatz setzt außerdem einen drallfreien Eintritt voraus. Der absolute Strömungswinkel α_1 wird gegen die Umfangsrichtung gemessen; bei $\alpha_1 = 90°$ gilt $c_1u = 0$. Zusammen mit der axialen Eintrittsgeometrie ergibt sich ein axialer, drallfreier Eintritt. Diese Annahmen gehören zum Modell und benötigen keine gesonderten Eingabefelder. [5]

Hydraulischer Wirkungsgrad: Zu Beginn ist eine Abschätzung nötig, mit der die Rechnung gestartet werden kann. Für eine tatsächlich weiterzuentwickelnde Konstruktion muss diese Annahme anhand des Energieflusses und der Leistungs- und Verlustbilanz der Pumpe überprüft werden. Sobald ein geprüfter Prototyp vorliegt, sind Messdaten hinzuzuziehen. Hydraulische Verluste, Leckage-, Reibungs- und mechanische Verluste sind auseinanderzuhalten. Ein dauerhaft angenommener Wirkungsgrad oder eine kleine Abweichung der errechneten Förderhöhe reicht als Bestätigung nicht aus. Der Rechenanhang erläutert eine Abschätzung aus dem Gesamtwirkungsgrad und deren Grenzen. [6]

Bedienung

Die Anwendung wird über die oben angegebene Seite des Ingenieurbüros geöffnet. Nach längerer Inaktivität kann die gehostete Anwendung eine kurze Aktivierung benötigen. Anschließend werden Betriebspunkt, Wirkungsgrade, Schaufelzahl und Dicken eingegeben und die übrigen Werte in den erweiterten Eingaben ergänzt.

Während der Eingabe nicht Enter drücken: Mit **Tab oder der Maus** zum nächsten Feld wechseln. Enter kann eine Berechnung auslösen, bevor alle Werte eingegeben sind. Dadurch können Standardwerte oder noch vorhandene Werte aus anderen Feldern in die Rechnung eingehen. Erst nach vollständiger Prüfung der Eingaben **Hydraulik & Geometrie berechnen** anklicken.

Austrittswinkel direkt vorgeben: Für dieses Vorgehen wird **Fester Benutzerwert** empfohlen; der Schaufelmetallwinkel β_2B wird entsprechend der Auslegungsentscheidung eingegeben. **Automatisch** ist eine experimentelle Rechenoption und wird hier nicht als empfohlenes Verfahren zur Winkelwahl verwendet. Die unten angesetzten 20° gelten nur für dieses Beispiel.

Nach der Berechnung werden Hinweise und Ergebnisse gemeinsam gelesen. Anschließend sind Meridianschnitt, Eintrittswinkel und Schaufelprojektionen zu prüfen. **Auch die Warnlogik ist experimentell und nicht für alle Fälle vollständig geprüft.** Hinweise können unpassend sein oder fehlen. Besonders erwünscht ist Feedback erfahrener Konstrukteure zu Grenzwerten, Fehlalarmen und Fällen, in denen eine Warnung ergänzt werden sollte. Jeder Hinweis muss im Zusammenhang mit Annahmen und Ergebnissen interpretiert werden. Ein fehlender Hinweis bedeutet keine technische Freigabe. Berichte, Tabellen und DXF-Dateien können für die Weiterarbeit im CAD heruntergeladen werden.

Ein Demonstrationsvideo zu Dateneingabe, Ergebnisprüfung und Export ist in Vorbereitung.

Auslegungsbeispiel

Das Beispiel behandelt die Vorauslegung eines Laufrads für Wasser bei 3 m³/h Nutzförderstrom, 12 m Förderhöhe und 3000 min⁻¹. Gewählt wurden 998 kg/m³ Dichte, 0,30 Gesamtwirkungsgrad, 0,62 hydraulischer Wirkungsgrad, fünf Schaufeln sowie 1 mm Eintritts- und 2 mm Austrittsdicke. Dies sind Werte dieses Falls und keine allgemeinen Konstanten. [2]

Bei Verwendung der dafür geltenden empirischen Beziehungen wird der Auslegungspunkt als angestrebter Bestpunkt behandelt. Der tatsächliche Bestpunkt muss später überprüft werden. [12] [17]

Der Rechenanhang zeigt die Überführung dieser Eingaben in Durchmesser, Breiten und Winkel sowie die Ableitung der Schaufelprojektionen aus dem Meridianschnitt. Die Entscheidungen der Handrechnung stammen aus **Calculations, Zeile 5**, ergänzt durch die Prüfung der Wellenrechnung in der Arbeitsmappe. Ich erprobe die Anwendung außerdem an mehreren Pumpen, Betriebspunkten und Parametergruppen; die Prüfung aller Fälle ist noch nicht abgeschlossen. [2]

Abmessungen des Meridianschnitts

Abb. 1 zeigt die Lage der wesentlichen Geometrieparameter. Der Meridianschnitt liegt in einer Ebene durch die Rotationsachse und beschreibt die Konturen an Nabe und Deckscheibe sowie die Lage der Eintrittskante. Seine geometrischen Definitionen verbinden die berechneten Maße mit der Zeichnung. Die Abbildung ist eine Bezeichnungszeichnung aus dem Projekt. [7] [8]

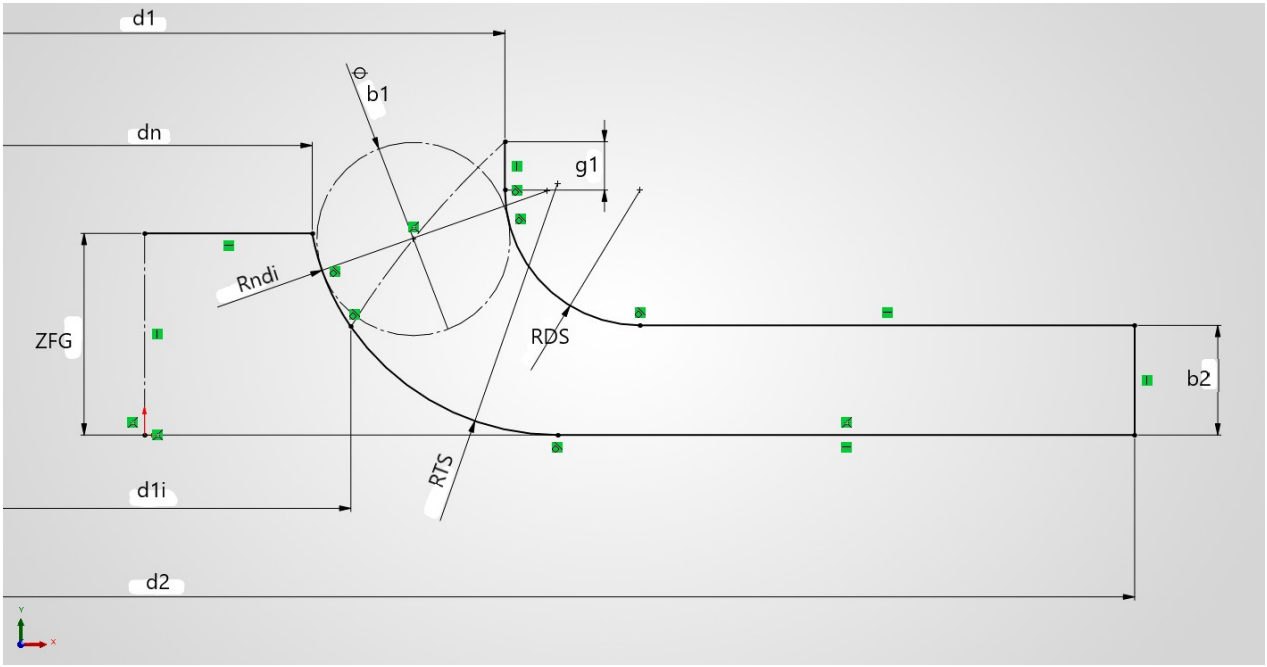


Abb. 1 Parameter des Meridianschnitts in der Projektzeichnung. Dargestellt sind d_1, d_n, d_1i, d_2, b_1, b_2, Krümmungsradien und g_1. Die Werte des Beispiels werden nicht aus dem Bildmaßstab bestimmt.

Symbol	Bedeutung in diesem Beitrag
d_1	Äußerer Eintrittsdurchmesser an der Deckscheibe
d_n	Nabendurchmesser im Eintrittsbereich
d_1i	Durchmesser des Schaufelbeginns auf der Nabe

Symbol	Bedeutung in diesem Beitrag
d_2	Austrittsdurchmesser im betrachteten radialen Fall
b_1	Geometrische Bezugsbreite am Eintritt
b_2	Austrittsbreite des Strömungskanals
RDS	Krümmungsradius der Deckscheibe
RTS	Hauptkrümmungsradius der Nabe in der Projektzeichnung
g_1	Kurzes gerades Stück vor Beginn der Deckscheibenkrümmung
Rndi	Übergangsradius am Nabeneintritt in der Projektkonstruktion
ZFG	Axiale Bezugskoordinate des Abschnitts FG im Zeichnungskoordinatensystem

Für die Konstruktion der Geometrie werden zusätzliche Bezeichnungen verwendet. Rndi und ZFG sind nicht ohne Weiteres als wortgleiche Gülich-Symbole zu verstehen. Bei gedrehter Darstellung entspricht die Bildvertikale nicht zwingend derselben physikalischen Richtung; maßgeblich sind Rotationsachse und definiertes Koordinatensystem.

Ergebnisse und ihre Bedeutung

Die wichtigsten Größen erscheinen in den Bereichen **Hydraulik**, **Meridianschnitt** und **Eintrittswinkel**. Der Anhang erläutert Beziehungen und Quellen. [9]

Ausgabe	Bedeutung
Q, H und n	Für die Rechnung verwendeter Betriebspunkt
n_q	Spezifische Drehzahl mit n in min^{-1}, Q in m^3/s und H in m; keine unabhängig vom Einheitensystem dimensionslose Größe
P_hyd	An die Flüssigkeit abgegebene hydraulische Nutzleistung
P_Welle	Auslegungsleistung der Welle mit Gesamtwirkungsgrad und Zuschlag des Beispiels
d_Welle und d_n	Wellenmaß des vereinfachten Ansatzes und daraus folgender Nabendurchmesser
d_1, d_2, b_1 und b_2	Grundabmessungen am Ein- und Austritt
β_2B und γ	Schaufelmetallwinkel am Austritt und Minderleistungsfaktor für den Schlupf
$NPSH_3$	Abschätzung nach dem Kriterium von 3 % Förderhöhenabfall; kein Nachweis kavitationsfreien Betriebs
RDS, RTS, Rndi, d_1i, g_1 und ZFG	Meridianschnittparameter aus Abb. 1
i_1	Inzidenzwinkel, der zur korrigierten relativen Strömungsrichtung am Eintritt addiert wird
β_1 Strömung Nabe/Deckscheibe	Relativer Strömungswinkel an den beiden Eintrittsbahnen

Ausgabe	Bedeutung
β_1B Metall Nabe/Deckscheibe	Schaufelmetallwinkel nach Hinzufügen der Inzidenz
τ_1 Nabe/Deckscheibe	Korrekturfaktoren für die durch Schaufeldicke verringerte freie Strömungsfläche
Berichte und Tabellen	Zusätzliche Größen wie H_cal, Geschwindigkeiten, Koordinaten und Elementdaten
Zeichnungen und DXF	Meridianschnitt und Schaufelprojektionen für die Weiterkonstruktion im CAD

Vergleich mit der gespeicherten Handrechnung

Die Tabelle vergleicht den in Excel gespeicherten Referenzfall mit den aus **vorhandenen Bildschirmaufnahmen** der Anwendung abgelesenen Werten des Falls **W3123000_Excel_Vergleich**. Es ist ein erster Vergleich; Unterschiede der Annahmen und Rechenwege werden im Anhang erläutert. Zur vollständigen Dokumentation gehören die tatsächlichen Eingaben, die Programmversion sowie Bericht und CSV-Dateien des abschließenden Videos. [2] [9]

Größe	Handrechnung in Excel	Anwendung laut Bildschirmaufnahmen
n_q	13,432124	13,4321
P_hyd in kW	0,09796368	0,0979
Auslegungsleistung der Welle in kW	0,37552744	0,3753
d_n in mm	18	18,000
d_1 in mm	34,634648	34,612
d_2 in mm	104,188	104,188
b_2 in mm	5,73034	5,730
β_2B in °	20	20,000
γ	0,79423114	0,79423
RDS in mm	5,814	5,814
RTS in mm	14,286	14,286
d_1i in mm	21,322	21,322
g_1 in mm	2,076	2,076
β_1B an der Nabe in °	27,987782	27,987
β_1B an der Deckscheibe in °	18,215	18,215
Umschlingung an der Nabe in °	209,898422	209,896
Umschlingung an der Deckscheibe in °	230,480158	230,502

Die Werte liegen bei mehreren Abmessungen und Winkeln nahe beieinander. Excel verwendet g = 9,816 m/s², die Anwendung 9,81 m/s²; dies erklärt den Leistungsunterschied. Auch der numerische Vorfaktor der Eintrittsdurchmesserformel und die Genauigkeit der Iteration unterscheiden sich. Weitere Unterschiede bestehen bei Annahmen zur Versperrung, der Geometrieerzeugung und der Auswertung der Projektionselemente. Deshalb sind nicht alle Abweichungen als Rundungseffekte zu erklären.

H_cal ist dem Rechenbericht zu entnehmen und in diesen Aufnahmen nicht sichtbar. Der Handrechenweg ergibt mit der dort angesetzten Schaufelneigung 11,940497 m; der Anhang erläutert diese Annahme und ihre Auswirkung. Viele Nachkommastellen dienen der Nachvollziehbarkeit, nicht dem Nachweis physikalischer Messgenauigkeit. Eine ausführliche Prüfung muss Berichte und Koordinatentabellen vergleichen und Blickrichtung, Winkelbezug, Elementzahl und Auswertungsverfahren festlegen.

Der Vergleich prüft die konsistente Umsetzung gemeinsamer Beziehungen und Auslegungsentscheidungen und soll Unterschiede erklären. Nahe beieinanderliegende Ergebnisse unterstützen diese Konsistenz, beweisen aber weder unabhängig das physikalische Modell noch die reale Pumpenleistung. Dafür sind Annahmenprüfung, Simulation und Versuch erforderlich. Hinweise auf fehlerhafte Anwendung von Beziehungen oder auf Ursachen der Abweichungen sind mit einem nachvollziehbaren Rechenfall willkommen. [3]

Umschlingung und Warnungen einordnen

Die Projektion zeigt eine relativ große Umschlingung. Die Aufnahmen weisen etwa 209,896° an der Nabe und 230,502° an der Deckscheibe aus. Die Umschlingung hängt von der Verteilung des Schaufelmetallwinkels zwischen Ein- und Austritt, dem Durchmesserverhältnis und der meridionalen Länge ab. Für fünf Schaufeln wird ein üblicher Bereich von ungefähr 130–160° genannt. Dies ist eine Auslegungsorientierung und kein allgemeingültiger Grenzwert. [10]

Eine Vergrößerung des **Schaufelmetallwinkels am Austritt β_2B** ist in diesem Beispiel eine untersuchenswerte Möglichkeit, die Umschlingung zu reduzieren. Dabei müssen Förderhöhe, Geschwindigkeiten, Schlupf, Austrittsbreite und Schaufelzahl erneut abgestimmt werden; eine gleichzeitige Verbesserung sämtlicher Größen ist damit nicht gesichert. **β** in der Projektionsbeziehung bezeichnet den **lokalen Schaufelmetallwinkel entlang der Bahn**. Am Austritt entspricht er β_2B und verändert sich zum Eintritt entsprechend der gewählten Winkelverteilung. Bei unveränderter Elementlänge und unverändertem Radius vermindert ein größeres lokales β den Winkelzuwachs; ein kleineres β vergrößert ihn. Der Begriff Austrittswinkel gilt daher nicht für alle Winkel entlang der Schaufel. [10] [11]

Die Aufnahmen zeigen außerdem $H_0/H \approx 1{,}366$, eine korrigierte Austrittsabweichung $\delta_2' \approx 13{,}8°$ und einen Hinweis auf unterschiedliche Eintrittskantenrichtungen der beiden Bahnen. Diese Größen dienen der Prüfung. Die im Programmhinweis verwendete Umschlingungsschwelle von 1,5 Winkelteilungen ist eine interne experimentelle Warnschwelle und nicht mit dem üblichen Bereich aus der Literatur gleichzusetzen. Anwender werden um eine praktische Bewertung der Hinweise und ihrer Empfindlichkeit sowie um Verbesserungsvorschläge gebeten. [9]

NPSH_A der Sauginstallation ist für dieses Beispiel nicht angegeben. Die große Umschlingung wird deshalb nicht auf nachgewiesene Saugbedingungen zurückgeführt. Auch die Eignung der Sauginstallation folgt nicht allein aus der $NPSH_3$-Abschätzung. [12]

Von den Projektionen ins CAD

Abb. 2 zeigt die beiden Schaufelbahnen nach dem Import einer DXF-Datei in SolidWorks mit den Teilungspunkten an Nabe und Deckscheibe. Diese Kurven bilden die Grundlage für die weitere Konstruktion der Schaufelfläche und die Prüfung ihres Verlaufs; dreidimensionale Konstruktion und Validierung folgen anschließend.

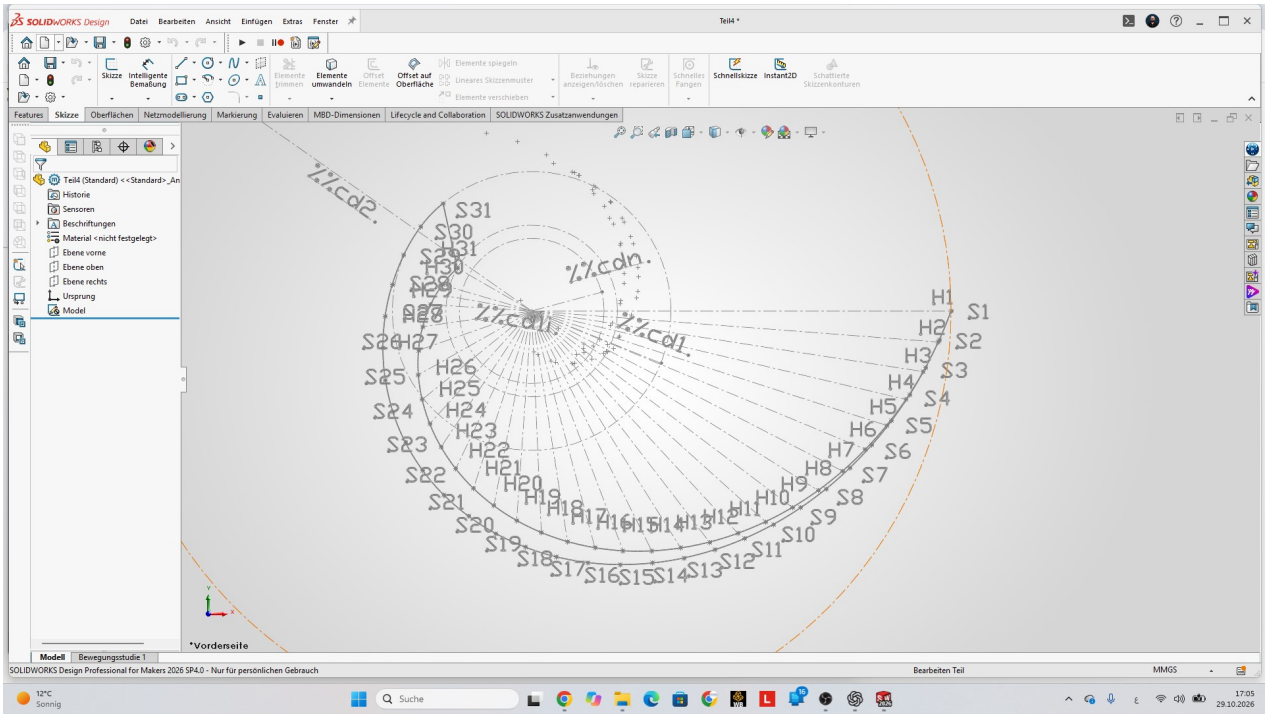


Abb. 2 Schaufelprojektionen in SolidWorks nach dem DXF-Import. Sichtbar sind die beiden Kurven und ihre Teilungspunkte als Beispiel für die Übernahme der Konstruktionsdaten ins CAD.

Abb. 3 erläutert die Verbindung zwischen Radien, radialen Differenzen und aufsummierten Winkelzuwächsen. Sie zeigt das Konstruktionsprinzip; im aktuellen Beispiel werden 30 Elemente je Bahn verwendet. Grundlage ist das Kaplan-Verfahren aus Abb. 7.7 des Referenzwerks. Der Anhang führt die Schritte aus. [10]

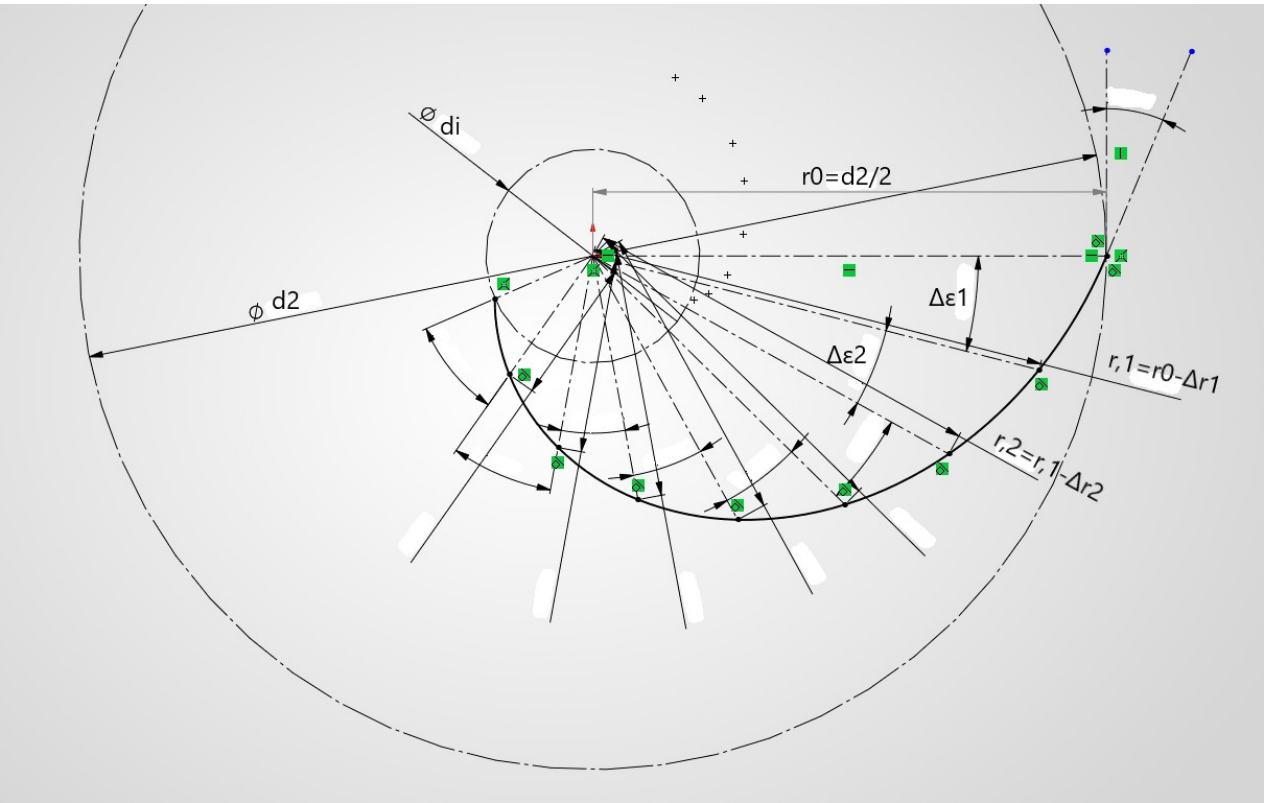


Abb. 3 Parameter zur Konstruktion der Schaufelprojektion. Ausgehend von $r_0 = d_2/2$ werden die weiteren Radien aus ihren radialen Differenzen und die Punkte mit den aufsummierten Winkeln bestimmt. Die Bezeichnungen gehören zur Projektkonstruktion.

Anwendung erproben und Rückmeldungen geben

Die Beta-Version macht die Vorauslegung nachvollziehbar, erlaubt veränderte Annahmen und zeigt deren Auswirkungen, bevor die Geometrie ins CAD übertragen wird. Das Beispiel erläutert die Rechenkette und offene Prüfaufgaben. Rechnerische Konsistenz, hydraulisch verbesserte Konstruktion und experimentelle Bestätigung werden dabei unterschieden.

Der Zugang erfolgt über die Website des Ingenieurbüros:

https://hme-alhelwani.de/kreiselpumpen-design-tool.html

Ich freue mich über Hinweise zu nicht konvergierenden Fällen, unerwarteten Werten, Gleichungen, Ein- und Ausgabedefinitionen, Geometrie und DXF-Dateien. Besonders erwünscht ist die Bewertung der experimentellen Warnungen mit Vorschlägen zu fehlenden oder zu korrigierenden Grenzen. Rückmeldungen bitte an **h.alhelwani@hme-alhelwani.de**, möglichst mit Eingaben, Fallname und Bericht oder Bildschirmaufnahme.

Rechenanhang

Eingaben des Beispiels

In den Gleichungen bleiben die Dezimalpunkte und Symbolbezeichnungen des Rechenwegs erhalten. Im Fließtext und in den Tabellen wird das deutsche Dezimalkomma verwendet.

Die Tabelle enthält die Eingaben des zugrunde gelegten Handrechenfalls. Einige Felder sind Suchstartwerte oder Darstellungseinstellungen und keine vorgegebenen Endabmessungen. Die

tatsächlich für die abschließende Anwendungsvorführung verwendeten Werte sind zusammen mit Video und Bericht zu dokumentieren. [2] [9]

Eingabe	Beispielwert	Bedeutung
Fallname	W3123000_Excel_Vergleich	Kennung für Fall und Dateien
Förderstrom Q und Einheit	3 und m³/h	Nutzförderstrom mit Einheit
Förderhöhe H	12 m	Geforderte Förderhöhe
Drehzahl n	3000 min^{-1}	Laufraddrehzahl
Dichte ρ	998 kg/m³	Wasserdichte im Beispiel
η_tot	0,30	Gesamtwirkungsgrad zur Leistungsabschätzung
η_h	0,62	Angenommener hydraulischer Wirkungsgrad zur Förderhöhenrechnung
Schaufelzahl z	5	Zahl der Schaufeln
i_1 manuell	3°	Inzidenz als Programmeingabe
Eintrittskantendicke e_1	1 mm	Schaufeldicke am Eintritt
Austrittskanten-/Schaufeldicke e_2	2 mm	Schaufeldicke am Austritt
S_P	1,15	Zuschlag zur Auslegungsleistung der Welle
r_M = M/T	0,50	Angenommenes Verhältnis von Biegemoment zu Torsionsmoment
K_m und K_t	2 und 1,5	Faktoren im vereinfachten Wellenmodell
τ_allow in der Oberfläche	40 MPa	Referenzspannung; keine nachgewiesene Eigenschaft einer bestimmten Legierung
F0s	2	Sicherheitsfaktor, durch den die Referenzspannung geteilt wird
Nabenwand min.	4 mm	Wanddicke um die Wellenbohrung
nss	180	Gewählte Saugkennzahl
Q_La-Faktor	1,06	Verhältnis von innerem Laufradstrom zu Nutzförderstrom
k_n Startwert	0,72936844	In Excel gespeicherter Iterationsstand; ein anderer Schätzwert ist als Start möglich
ψ Startwert	1	Startwert zur ersten Abschätzung der Austrittsgeschwindigkeit
b_2* Eingabewert	0,055	Gewähltes Verhältnis b_2/d_2; in der beschriebenen Version als Eingabe festgehalten
Berechnungsmodus für β_2B	Fester Benutzerwert	Direkte Vorgabe des Austrittsmetallwinkels

Eingabe	Beispielwert	Bedeutung
β_2B Eingabewert	20°	Gewählter Austrittswinkel dieses Falls
Gehäusetyp	Spiralgehäuse (volute)	Gehäusemodell für Prüfungen; keine vollständige Spiralgehäuseauslegung
Projektionssegmente Nb	30	Teilstücke je Bahn, nicht Schaufelzahl
ε_0	0°	Winkelbezug der Projektion
εDS und εTS	Jeweils 0°	Austrittsneigungen von Deck- und Tragscheibe im Meridianschnitt

Innerer Förderstrom und Wirkungsgrade

Der innere Laufradstrom wird im Beispiel um angenommene 6 % gegenüber dem Nutzförderstrom erhöht:

$$Q = \frac{3}{3600} = 0.0008333333\ \mathrm{m^3/s}, \qquad Q_{La} = 1.06Q = 0.0008833333\ \mathrm{m^3/s}.$$

Die Laufradrechnung unterscheidet zwischen Nutzförderstrom und innerem Strom einschließlich Leckage. Die 6 % sind eine Annahme der Excel-Rechnung. [13] [2]

Wenn sich der hydraulische Wirkungsgrad schwer abschätzen lässt, kann folgende Näherung insbesondere für kleine Pumpen und bei Teillast hilfreich sein:

$$\eta_h \approx \frac{1+\eta_{tot}}{2} = \frac{1+0.30}{2} = 0.65.$$

Dies ist eine Abschätzung und keine allgemeine physikalische Gleichheit zwischen den Wirkungsgraden. Algebraisch lässt sie sich umstellen zu:

$$\eta_{tot} \approx 2\eta_h - 1.$$

Die umgekehrte Form ist dieselbe Beziehung, keine eigenständige empirische Formel des Buchs. Bei η_h = 0,62 liefert sie etwa η_tot = 0,24. Im Beispiel wurden dagegen η_tot = 0,30 und η_h = 0,62 unabhängig gewählt. Keiner dieser beiden Beispielwerte wurde über diese Beziehung aus dem anderen abgeleitet. Aus η_tot = 0,30 folgt mit der ursprünglichen Näherung η_h ≈ 0,65. [6] [2]

Für eine weiterzuentwickelnde Konstruktion wird der hydraulische Wirkungsgrad aus Energiefluss, Leistungs- und Verlustbilanz überprüft. Nutzförderstrom und Leckage sowie hydraulische, Scheibenreibungs- und mechanische Verluste sind zu trennen und die Rechnung später mit Messdaten abzugleichen. Ohne Kenntnis der übrigen Verluste lässt sich der Gesamtwirkungsgrad nicht genau allein aus dem hydraulischen Wirkungsgrad bestimmen. [6]

Spezifische Drehzahl und Saugverhalten

Mit dem Nutzförderstrom und den oben festgelegten Einheiten ergibt sich:

$$n_q = \frac{n\sqrt{Q/f_q}}{H^{3/4}} = \frac{3000\sqrt{0.0008333333}}{12^{3/4}} = 13.432124.$$

Hier gilt f_q = 1 und es wird die Förderhöhe einer Stufe verwendet. [14]

Die Saugkennzahl wird für den Bestpunkt definiert. Im Beispiel gilt der Auslegungsförderstrom als angestrebter Bestpunktförderstrom. Mit nss = 180 folgt aus der Definition die Abschätzung:

$$NPSH_3 = \left(\frac{n\sqrt{Q/f_q}}{n_{ss}}\right)^{4/3} = 0.377002\ \text{m}.$$

Dieser Wert beruht auf der gewählten Saugkennzahl. NPSH_A einer tatsächlichen Anlage ist in der Arbeitsmappe nicht angegeben und kann damit nicht verglichen werden. [12] [2]

Auslegungsleistung der Welle

Die Handrechnung verwendet g = 9,816 m/s²:

$$P_{hyd} = \rho g Q H = 998 \times 9.816 \times \frac{3}{3600} \times 12 = 97.96368\ \text{W}.$$

$$P_{shaft,\,est} = \frac{P_{hyd}}{\eta_{tot}} = 326.5456\ \text{W}.$$

Die Beziehungen beschreiben Nutzleistung und aus dem Gesamtwirkungsgrad abgeschätzte Wellenleistung. [15] Danach wird der Zuschlag des Beispiels angesetzt:

$$P_{design} = S_P P_{shaft,\,est} = 1.15 \times 326.5456 = 375.52744\ \text{W}.$$

Die letzte Größe wird hier **Auslegungsleistung der Welle** genannt. S_P = 1,15 ist eine Entscheidung dieses Beispiels und keine allgemeine Konstante der Beziehung. [2]

Erste mechanische Abschätzung

Für die Beispielwelle wurde nichtrostender Stahl vorgesehen. Eine bestimmte Legierung oder ein Wärmebehandlungszustand ist in den verfügbaren Angaben nicht belegt. Die Spannung wird deshalb als Rechenannahme behandelt und nicht als allgemein gültige oder nachgewiesene Stahleigenschaft. Die folgende Rechnung bewertet die Gleichungen des Wellenmodells der Arbeitsmappe mit der Leistung aus Zeile 5 neu.

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 314.159265\ \text{rad/s}, \qquad T = \frac{P_{design}}{\omega} = 1.195341\ \text{N m}.$$

Die Rotationsleistungsbeziehung P = ωT verknüpft diese Größen. [16]

Das Beispielmodell setzt M/T = 0,5, K_m = 2 und K_t = 1,5 voraus und kombiniert Biegung und Torsion entsprechend dem Wellenblatt:

$$M = 0.5T = 0.597670\ \text{N m}.$$

$$K_m M = 1.195341\ \text{N m}, \qquad K_t T = 1.793011\ \text{N m}.$$

$$T_{eq} = \sqrt{(K_m M)^2 + (K_t T)^2} = 2.154932\ \text{N m}.$$

Dies ist die Gleichung des ergänzenden mechanischen Excel-Modells. M/T ist eine Näherungsannahme und kein Ergebnis einer konkreten Last- und Lagerabstandsanalyse. [2]

Um die Referenzspannung nicht mit einer bereits einschließlich Sicherheitsfaktor zulässigen Spannung zu verwechseln, wird sie hier τ_ref genannt:

$$\tau_{design} = \frac{\tau_{ref}}{F_{0s}} = \frac{40}{2} = 20\ \text{MPa}.$$

$$d_{shaft} = \left(\frac{16 \times 1000 T_{eq}}{\pi \tau_{design}}\right)^{1/3} = 8.186995\ \text{mm}.$$

Die Torsionsspannungsbeziehung lautet τ = 16T/(πd³). [16] Die Verwendung von T_eq anstelle des reinen Torsionsmoments ist die im Arbeitsmappenmodell definierte Erweiterung. [2]

Für die erste Bohrungsabschätzung verwendet das Beispiel einen weiteren Faktor von 1,1. Gewählt wird anschließend eine Bohrung von 10 mm:

$$d_{bore,calc} = 1.1 d_{shaft} = 9.005695\ \text{mm}, \qquad d_{bore,selected} = 10\ \text{mm}.$$

Mit 4 mm Nabenwanddicke folgt:

$$d_n = d_{bore,selected} + 2 \times 4 = 18\ \text{mm}.$$

Diese Festlegungen beweisen weder die Wellen- noch die Verbindungsfestigkeit. In der endgültigen Konstruktion sind Werkstoff, Lasten, Ermüdung, Verformungen, kritische Drehzahlen und Befestigungsdetails zu bestimmen. Sie beeinflussen auch die möglichen hydraulischen Abmessungen. [16]

Eintrittsdurchmesser iterativ bestimmen

Das freie Eintrittsflächenverhältnis hängt von Naben- und Eintrittsdurchmesser ab:

$$k_n = 1 - \left(\frac{d_n}{d_1}\right)^2.$$

Ausgehend von einem Schätzwert werden die normierte Saugkennzahl und der Anströmwinkel ermittelt. Nach der Berechnung von d_1 wird k_n aktualisiert und die Rechnung wiederholt. [17]

Mit dem in der Arbeitsmappe gespeicherten Stand k_n = 0,72936844 gilt:

$$n_{ss}^{**} = \frac{n_{ss}}{\sqrt{k_n}} \left(\frac{n_{q,Ref}}{n_q}\right)^{0.19}, \qquad n_{q,Ref} = 27.$$

$$n_{ss}^{**} = \frac{180}{\sqrt{0.72936844}} \left(\frac{27}{13.432124}\right)^{0.19} = 240.66373.$$

Aus **Abb. 6.21**, normierte Saugkennzahl über Anströmwinkel, wird $\beta_{1a} \approx 13{,}3°$ abgelesen. Die eingezeichnete Kurve beschreibt:

$$n_{ss}^{**} = \frac{125}{\varphi_1^{0.455}}, \qquad \varphi_1 = \tan\beta_{1a}.$$

Durch rechnerische Umkehrung folgt:

$$\varphi_1 = \left(\frac{125}{n_{ss}^{**}}\right)^{1/0.455} \approx 0.23698665, \qquad \beta_{1a} \approx 13.33237°.$$

Excel verwendet 13,3322°. Die Nachkommastellen entsprechen keiner ebenso genauen visuellen Ablesung des empirischen Diagramms. [17] [2]

Für einflutigen, drallfreien Eintritt lautet die Durchmesserbeziehung in den Einheiten dieses Beispiels:

$$d_1[\text{mm}] = 2900 \left(\frac{Q_{La}[\text{m}^3/\text{s}]}{f_q\, n[\text{rpm}]\, k_n \tan\beta_{1a}}\right)^{1/3} = 34.634648.$$

Anschließend wird k_n aktualisiert und die Rechnung wiederholt, bis Durchmesser und Flächenverhältnis gemeinsam konvergieren. Mit den gespeicherten Abmessungen ergibt die Rückrechnung allerdings k_n = 0,72990071 statt des gespeicherten Werts 0,72936844. Daher wird d_1 = 34,634648 mm als Durchmesser des gespeicherten Referenzfalls verwendet und nicht als Ergebnis einer vollständig geschlossenen Iteration bezeichnet. Der Rest kann mit der Zusammenstellung von Werten unterschiedlicher Rechenstände zusammenhängen; aus der verfügbaren Dokumentation ist seine Ursache nicht abschließend geklärt. Der Faktor 2900 entspricht Gülichs gerundetem Faktor 2,9 nach Umrechnung in Millimeter. Auch damit lässt sich die Iteration schließen. Bei einer neuen

Auslegung müssen Vorfaktoren, Ermittlung des Anströmwinkels und Konvergenzkriterium einheitlich festgelegt werden. [17] [2]

Austrittsbreite und Schaufelwinkel abstimmen

Für radiale und halbaxiale Laufräder wird die relative Austrittsbreite definiert als:

$$b_2^{*} = \frac{b_2}{d_{2a}}.$$

Das Diagramm zur Austrittsbreite zeigt einen empirischen Bereich. Die folgende Beziehung nähert dessen Mittellinie an:

$$b_2^{*} = 0.017 + 0.262\left(\frac{n_q}{100}\right) - 0.08\left(\frac{n_q}{100}\right)^2 + 0.0093\left(\frac{n_q}{100}\right)^3.$$

Hier gilt n_q,Ref = 100; dies ist ein anderer Bezugswert als 27 bei der Saugnormierung. Bei n_q = 13,432124 ergibt sich b_2^{*} = 0,05077133. Für das Beispiel wurde 0,055 gewählt, also ein Wert oberhalb der Mittellinie. Er ist mit Schaufelzahl, Austrittswinkel und Stabilität der Q-H-Kennlinie abzustimmen. [11] [2]

Zunächst wird die Austrittsgeschwindigkeit aus einem gewählten Förderhöhenbeiwert ψ abgeschätzt; danach werden die Abmessungen überprüft:

$$u_{2,\,start} = \sqrt{\frac{2gH}{\psi}}, \qquad \psi_{start} = 1, \qquad u_{2,\,start} = 15.348746\ \mathrm{m/s}.$$

Dies liefert die erste Austrittsgeschwindigkeit. [18] Die endgültig gewählten Werte der Handrechnung lauten d_2 = 104,188 mm, β_{2B} = 20° und z = 5. Damit:

$$b_2 = 0.055 \times 104.188 = 5.73034\ \mathrm{mm}.$$

$$u_2 = \frac{\pi d_2 n}{60000} = 16.365813\ \mathrm{m/s}.$$

Die Beziehung berücksichtigt die Umrechnung von Millimeter in Meter. Für die abschließende Rechnung wird die aus dem tatsächlichen Durchmesser folgende Umfangsgeschwindigkeit verwendet, nicht der erste Schätzwert. [19]

Versperrung und Schlupf berücksichtigen

Nach Umrechnung von d_2 und b_2 in Meter ergeben sich geometrische Austrittsfläche und Meridiangeschwindigkeit vor der Schaufelversperrung:

$$A_2 = \pi d_2 b_2 = 0.0018756334\ \mathrm{m}^2, \qquad c_{2m} = \frac{Q_{La}}{A_2} = 0.470952\ \mathrm{m/s}.$$

Die Beziehungen gelten für den betrachteten radialen, einflutigen Fall. Die Schaufeldicke geht in die Versperrungskorrektur ein:

$$\tau_2 = \left(1 - \frac{z e_2}{\pi d_2 \sin\beta_{2B} \sin\lambda_{La}}\right)^{-1}, \qquad c'_{2m} = \tau_2 c_{2m}.$$

λLa ist nach Gülich der Neigungswinkel zwischen Schaufel und Scheibe. Er unterscheidet sich vom Austrittsmetallwinkel β_{2B} und von der Neigung der Deckscheibenkontur im Meridianschnitt. Bei senkrecht auf der Scheibe stehender Schaufel gilt λLa = 90°. [19]

Die Handrechnung setzt über die Austrittsbreite einen Umfangsversatz von Θ = 4° an und leitet daraus näherungsweise eine Neigung ab:

$$\ell = \frac{d_2}{2}\Theta_{rad} = 3.636847\ \text{mm}, \qquad \lambda_{La,assumed} = \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{\ell}\right) = 57.598126^\circ.$$

Damit folgen τ_2 = 1,11831590 und c'_2m = 0,526673 m/s. Dies ist eine geometrische Annahme der Handrechnung. Ihre Übereinstimmung mit der Neigung der tatsächlich erzeugten Schaufelfläche ist nicht nachgewiesen. Die Konstruktion wird deshalb nicht als allgemeines Verfahren zur Bestimmung von λLa dargestellt; vor der Verwendung in einer realen Auslegung muss die Neigung an der Geometrie geprüft werden. Das dem Vergleich zugrunde gelegte Anwendungsmodell verwendet dagegen sin λLa = 1. Diese Abweichung beeinflusst Geschwindigkeiten und Förderhöhe auch bei unveränderten Abmessungen. [2] [9]

Der Minderleistungsfaktor für den Schlupf ergibt sich aus folgender Beziehung. Die zugehörige Tabelle setzt z ≥ 3 voraus:

$$\gamma = f_1 k_w \left(1 - \frac{\sqrt{\sin\beta_{2B}}}{z^{0.7}}\right).$$

f_1 und k_w hängen von Laufradtyp und Durchmesserverhältnis ab und sind keine Konstanten für sämtliche Auslegungen. Für das Radiallaufrad wird hier f_1 = 0,98 angesetzt. Zunächst wird die Grenze des Einflusses des Eintrittsdurchmesserverhältnisses berechnet:

$$\varepsilon_{Lim} = \exp\left(-\frac{8.16\sin\beta_{2B}}{z}\right) = 0.57225140.$$

Der mittlere Eintrittsdurchmesser wird entsprechend Gülich definiert:

$$d_{1m} = \sqrt{\frac{d_{1a}^2 + d_{1i}^2}{2}}.$$

Für die Erläuterung gelten der hier definierte äußere Eintrittsdurchmesser $d_1a = d_1$ = 34,634648 mm und der Durchmesser des Schaufelbeginns an der Nabe d_1i = 21,322 mm. Daraus folgt:

$$d_{1m} = 28.759229\ \text{mm}, \qquad d_{1m}^* = \frac{d_{1m}}{d_2} = 0.27603207.$$

Das Verhältnis liegt unter εLim. Daher gilt k_w = 1. Verwendet wird hier die korrigierte Definition des mittleren Durchmessers anstelle der in der älteren Rechnung verwendeten Wurzel aus dem Durchmesserprodukt. Für diesen Fall ändern sich dadurch weder der gewählte Zweig noch der Minderleistungsfaktor. Oberhalb der Grenze lautet die Korrektur:

$$k_w = 1 - \left(\frac{d_{1m}^* - \varepsilon_{Lim}}{1 - \varepsilon_{Lim}}\right)^3.$$

Für den hier geltenden Zweig erhält man γ = 0,79423114. Das ist das Ergebnis mit k_w = 1 und beweist allein nicht, welche Mittelwertformel im Anwendungscode implementiert ist. Die Programmprüfung muss den Code und Fälle untersuchen, in denen die unterschiedliche Definition die Korrektur tatsächlich verändert. [20] [2]

Aus dem Austrittsdreieck folgt:

$$c_{2u} = \gamma u_2 - \frac{c'_{2m}}{\tan\beta_{2B}} = 11.551216\ \text{m/s}.$$

Die Versperrungskorrektur wird in dieser Beziehung einmal angewendet. Die Umfangskomponente wurde konsistent mit dem Förderhöhenrechenweg neu ausgewertet, ohne die in einzelnen älteren Beispielrechnungen enthaltene doppelte Korrektur. [19] [2]

Mit Euler-Gleichung, hydraulischem Wirkungsgrad und c_1u = 0 ergibt sich:

$$H_{cal} = \frac{\eta_h}{g}(u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}) = \frac{\eta_h u_2 c_{2u}}{g} = 11.940497\ \text{m}.$$

Die Abweichung gegenüber dem Zielwert von 12 m beträgt im Handmodell mit obiger Neigungsannahme etwa −0,496 %. Eine Sensitivitätsrechnung mit unveränderten übrigen Größen und λLa = 90° liefert τ₂ = 1,09808850 und H_cal = 11,967552 m. Dies ist eine erläuternde Handrechnung und kein neuer Programmlauf. Der rechnerische Rest ist kein gemessener Leistungsfehler der Pumpe. Die Vorhersagegüte bleibt von Annahmen und empirischen Beziehungen abhängig. [19] [21] [2]

Meridianschnitt und örtliche Eintrittswinkel

Das Beispiel verwendet die gespeicherten Geometriemaße RDS = 5,814 mm, RTS = 14,286 mm, g_1 = 2,076 mm und d_1i = 21,322 mm sowie jeweils 0° Austrittsneigung. Abb. 1 zeigt ihre Lage. Die Maße enthalten Entscheidungen zur geometrischen Gestaltung; sie sind nicht sämtlich Ergebnisse geschlossener hydraulischer Beziehungen.

Für die erste geometrische Abschätzung gilt:

$$b_1 = \frac{d_1 - d_n}{2} = 8.317324\ \text{mm}, \qquad R_{DS} \approx (0.6\ \text{to}\ 0.8) b_1.$$

Vor Beginn der Deckscheibenkrümmung wird ein kurzes Stück g_1 von etwa 0,2–0,3 b_1 vorgesehen. Nabenform und Verlauf der Strömungsfläche sind zusammen mit der Schaufelgeometrie zu überprüfen. [7]

Die Eintrittswinkel werden örtlich an Nabe und Deckscheibe berechnet. Für drallfreien Eintritt gilt je Bahn j:

$$\beta'_{1,j} = \tan^{-1}\left(\frac{\tau_{1,j} c_{1m,j}}{u_{1,j}}\right), \qquad \beta_{1B,j} = \beta'_{1,j} + i_{1,j}.$$

$$\tau_{1,j} = \left(1 - \frac{z e_1}{\pi d_{1,j} \sin\beta_{1B,j} \sin\lambda_{La,j}}\right)^{-1}.$$

j bezeichnet die Nabenbahn H oder die Deckscheibenbahn S. Verwendet werden der örtliche Durchmesser an der jeweiligen Eintrittskante, d_1,H = d_1i beziehungsweise d_1,S = d_1, und die lokale Neigung. Da die Versperrung vom noch zu bestimmenden Schaufelwinkel abhängt, ist die Rechnung gekoppelt und muss bei einer neuen Auslegung gemeinsam mit dem Eintrittswinkel gelöst werden. [22]

Zur Reproduktion der gespeicherten örtlichen Werte werden zunächst Eintrittsfläche und mittlere Geschwindigkeit vor der Schaufelversperrung bei einheitlichen Einheiten bestimmt. Für die Geschwindigkeitsrechnung ist die Fläche in m² einzusetzen:

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_n^2) = 687.662330\ \text{mm}^2, \qquad c_{1,avg} = \frac{Q_{La}}{A_1} = 1.28454518\ \text{m/s}.$$

Das Beispiel setzt K_c = 0,02 an. Die Bezugsströmung wird an der Nabe um 2 % erhöht und an der Deckscheibe um 2 % vermindert. Dies ist eine Beispielannahme und keine allgemeine Konstante. Verwendet werden außerdem die gespeicherten örtlichen Faktoren τ_1,H = 1,18915 und τ_1,S = 1,17248:

$$c'_{m,H} = (1 + K_c) c_{1,avg} \tau_{1,H} = 1.55806724\ \text{m/s}.$$

$$c'_{m,S} = (1 - K_c) c_{1,avg} \tau_{1,S} = 1.47598147\ \text{m/s}.$$

Die beiden Versperrungsfaktoren werden als gespeicherte Referenzwerte zur Nachrechnung angegeben. Ihre Zellen enthalten im geprüften Stand keine iterative Lösung, welche ihre Ableitung aus der lokalen Geometrie belegt. In einem neuen Fall müssen sie neu berechnet und mit Durchmessern, Winkeln und Schaufelneigung abgestimmt werden; sie sind nicht als Konstanten zu übernehmen. [2] [22]

Aus örtlichem Durchmesser und Drehzahl folgen die Umfangsgeschwindigkeiten; anschließend wird die gewählte Inzidenz addiert:

$$u_{1,H} = \frac{\pi d_{1i} n}{60000} = 3.349252\ \text{m/s}, \qquad u_{1,S} = \frac{\pi d_1 n}{60000} = 5.440398\ \text{m/s}.$$

$$\beta_{1B,H} = \tan^{-1}\left(\frac{1.55806724}{3.34925193}\right) + 3.04^\circ = 27.987782^\circ.$$

$$\beta_{1B,S} = \tan^{-1}\left(\frac{1.47598147}{5.44039785}\right) + 3.036009^\circ = 18.215^\circ.$$

Damit werden Strömungswinkel vor und nach Versperrung und der um die Inzidenz erhöhte Schaufelmetallwinkel voneinander unterschieden: [22] [2]

Bahn	u_1 in m/s	c'_m in m/s	Inzidenz	$\beta_1 B$ in °
Nabe H	3,349252	1,558067	3,04°	27,987782°
Deckscheibe S	5,440398	1,475981	3,036009°	18,215°

Diese örtlichen Werte stammen aus der Handrechnung. Die Anwendung erhält einen einzigen Inzidenzwert, in der dokumentierten Vorführung 3°, und löst die Eintrittskorrektur nach ihrem Modell. Eine exakte Übereinstimmung sämtlicher interner Werte wird daher nicht vorausgesetzt. [2] [9]

Schaufelprojektionen nach Kaplan konstruieren

Naben- und Deckscheibenbahn im Meridianschnitt werden jeweils in gleich lange Elemente Δm geteilt. An den Teilungspunkten werden die Radien abgelesen, und es wird eine Verteilung des Schaufelwinkels zwischen den Bahnenden festgelegt. Dies ist die Grundlage der Kaplan-Konstruktion aus Abb. 7.7. [10]

Die Daten der Handrechnung lauten:

$$L_{m,H} = 43.37537221\ \text{mm}, \qquad L_{m,S} = 40.181\ \text{mm}, \qquad N_b = 30.$$

$$\Delta m_H = \frac{L_{m,H}}{N_b} = 1.44584574\ \text{mm}, \qquad \Delta m_S = 1.33936667\ \text{mm}.$$

So entstehen 31 Punkte je Bahn. Δm ist die Länge auf der Meridiankurve; Δr ist dagegen die radiale Projektion zwischen zwei Punkten. Beide sind nur auf einem geraden radialen Abschnitt gleich. Radiale Differenzen werden aus dem Meridianschnitt entnommen und dürfen auf einer gekrümmten Bahn nicht durch deren Elementlängen ersetzt werden. [10] [2]

Im Beispiel wird vom Austritt zum Eintritt eine lineare Winkelverteilung verwendet:

$$\beta_j = \beta_{2B} + \frac{j}{N_b}(\beta_{1B} - \beta_{2B}), \qquad j = 0, \ldots, N_b.$$

Dies ist eine mögliche Verteilung zwischen den Bahnenden. An der Nabe verläuft sie von 20° am Austritt zu 27,987782° am Eintritt, an der Deckscheibe von 20° zu 18,215°.

Umfangsweg, Elementlänge und örtlicher Schaufelmetallwinkel sind verknüpft durch:

$$\Delta u_j = \frac{\Delta m}{\tan \beta_j}.$$

Die vorliegende Excel-Umsetzung wertet Winkel und Radius am Anfang des Elements aus und verwendet damit:

$$\Delta u_j = \frac{\Delta m}{\tan \beta_{j-1}}, \qquad \Delta \varepsilon_j \approx \frac{\Delta u_j}{r_{j-1}}.$$

Der Winkel in der letzten Beziehung wird im Bogenmaß berechnet. Die Formel nähert die örtliche Differentialbeziehung an:

$$\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\mathrm{d}m}{r \tan \beta}.$$

Mit steigender Elementzahl bei unveränderter Bahn und Winkelverteilung wird Δm kleiner. Radius und Winkel ändern sich innerhalb eines Elements weniger, und die Elementsumme nähert sich dem Integral entlang der Bahn. Der Diskretisierungsfehler nimmt dadurch normalerweise ab. Die Konvergenz ist durch Vergleich bei erhöhter Elementzahl zu prüfen; mehr Elemente beheben weder falsche Annahmen noch eine ungeeignete Geometrie. Die Differentialform ist hier eine mathematische Erläuterung der Konstruktionsbeziehung, keine zusätzlich zitierte nummerierte Buchgleichung. [10]

Für das erste Element an der Nabe gilt beispielsweise:

$$r_0 = \frac{d_2}{2} = 52.094\ \mathrm{mm}, \qquad \beta_0 = 20^\circ.$$

$$\Delta u_1 = \frac{1.44584574}{\tan 20^\circ} = 3.972429\ \mathrm{mm}.$$

$$\Delta \varepsilon_1 = \frac{3.972429}{52.094} = 0.076254\ \mathrm{rad} \approx 4.36909^\circ.$$

Die Winkel werden summiert und die Radien aus dem Meridianschnitt bestimmt, wie Abb. 3 zeigt:

$$r_j = r_{j-1} - \Delta r_j, \qquad \varepsilon_j = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{j} \Delta \varepsilon_k.$$

Zur Darstellung der Projektion lassen sich die Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten umrechnen:

$$x_j = r_j \cos \varepsilon_j, \qquad y_j = r_j \sin \varepsilon_j.$$

Die letzten Beziehungen sind geometrische Koordinatentransformationen aus den Projektdaten. Der räumliche Punkt auf der Schaufelfläche wird durch r, z und ε beschrieben. [10] [2] Beim Export sind Blickrichtung und Winkelbezug zu beachten. Die Kurven dienen zur Weiterbearbeitung im CAD wie in Abb. 2.

Eine fertig gezeichnete Projektion ist noch keine abgeschlossene Schaufeloptimierung. Oberflächenglätte, Belastungsverteilung, Verluste, Saugverhalten und Betrieb über den Kennlinienbereich sind anschließend zu untersuchen. [10]

Literatur und Quellenhinweise

[1] Johann Friedrich Gülich, **Centrifugal Pumps**, **Second edition**, **englischsprachig**, Springer, 2010. ISBN 978-3-642-12823-3; e-ISBN 978-3-642-12824-0. Seitenzahlen beziehen sich auf die gedruckte Paginierung dieser Ausgabe, nicht auf den PDF-Seitenzähler. T kennzeichnet eine Gleichung innerhalb einer Tabelle.

[2] Beispieldaten und Auslegungsentscheidungen: **Hydraulic Design Calculation Sheet_W3123000.xlsx**, geprüfter Stand der Cloud-Arbeitsmappe vom 28. Oktober 2026; **Calculations, Zeile 5**, sowie **ShaftDiameter**. Enthalten sind

gewählte Werte und die im Text erläuterten konsistenten Neubewertungen. Beispielbezogene Auslegungswerte und mechanische Annahmen werden Gülich nicht zugeschrieben. Angaben zu laufenden Erprobungen und Beispielhintergrund stammen vom Autor der Anwendung und sind keine abgeschlossene unabhängige Validierung.

[3] Gülich, Quelle 1, S. 337–339, Abschn. 7.1.1 **Methods for the development of hydraulic components** und 7.1.2 **The hydraulic specification**: Vorrechnung, Grenzen eindimensionaler Verfahren, Erfahrung, numerische Verbesserung und anschließende Versuche. Die Unterscheidung zwischen numerischer Konvergenz und nachgewiesener Optimalität ist eine methodische Erläuterung dieses Beitrags.

[4] Gülich, Quelle 1, Symbolverzeichnis, S. XXIII: **f_q = impeller eyes per impeller** und **f_n = rotational frequency n/60**. Der Artikel behandelt einflutigen Eintritt mit f_q = 1.

[5] Gülich, Quelle 1, S. 71–72, Abb. 3.1: Winkel und Geschwindigkeitskomponenten am Laufradeintritt sowie verschwindende Umfangskomponente bei $\alpha_1 = 90°$.

[6] Gülich, Quelle 1, S. 83–85, Abschn. 3.5 **Power balance and efficiencies**, Abb. 3.9; S. 108–109 zu Verlusten und Wirkungsgraden; S. 117, Abschn. 3.9, Gl. (3.28a) zur Abschätzung des hydraulischen Wirkungsgrads; S. 135, Tab. 3.5 zur Leistungsbilanz; S. 341, Abschn. 7.2.1 zur ersten Wirkungsgradannahme. η_tot ≈ 2η_h − 1 ist hier die algebraische Umstellung von (3.28a), keine eigenständige empirische Beziehung und kein Ersatz für die Energiebilanz.

[7] Gülich, Quelle 1, S. 344 zum Schaufelanfang; S. 350–352, Abschn. 7.2.2.1 **Meridional section**, Abb. 7.4 und Gl. (7.2): Schnittabmessungen, Eintrittsbreite, Deckscheibenkrümmung und g_1. Rndi und ZFG sind Konstruktionsbezeichnungen des Projekts.

[8] Projektzeichnungen **Meridianschnitt_Parameter_Fig_01.png**, **Schaufelprojektion_DXF_fig_02.png** und **Schaufelprojektion_Parameter_fig_03.png**. Abb. 1 und 3 erläutern Bezeichnungen und Prinzip. Die Beispielwerte werden nicht aus dem Bildmaßstab abgeleitet.

[9] Quelle für gespeicherte Ergebnisse und Bedienung: **App_Fig_04.png**, **App_Fig_05.png** und **App_Fig_06.png**, Fall **W3123000_Excel_Vergleich**, gespeichert am 29. Oktober 2026, ergänzt um Oberflächenbezeichnungen und Entwicklerhinweise. Der Anwendungsspalte liegt die Anzeigegenauigkeit der Aufnahmen zugrunde. Für die Artikeltabelle wurde kein neuer Programmlauf durchgeführt; eine vollständige Koordinatenprüfung liegt nicht vor. Die Warnungen sind experimentell und nicht für sämtliche Fälle geprüft.

[10] Gülich, Quelle 1, S. 352–359, Abschn. 7.2.2.2 **Blade design**; Gl. (7.3–7.9) auf S. 352–353, Konstruktion mit kleinen Elementen auf S. 353–354, üblicher Umschlingungsbereich bei fünf Schaufeln auf S. 354 und Kaplan-Verfahren in Abb. 7.7 auf S. 356. Lineare Winkelverteilung und Auswertung am Elementanfang sind Festlegungen des Beispiels. Differentialform und Konvergenzerläuterung sind mathematische Herleitungen und Erklärungen, keine wörtlichen Zitate.

[11] Gülich, Quelle 1, S. 345–346, Abschn. 7.2.1, Gl. (7.1) und Abb. 7.2: relative Austrittsbreite, empirischer Bereich und Abstimmung mit Schaufelzahl, Austrittswinkel und Kennlinienstabilität. $b_2^* = 0{,}055$ ist die Beispielentscheidung; die Mittellinie ergibt hier etwa 0,05077133.

[12] Gülich, Quelle 1, S. 271, Gl. (6.7): Saugkennzahl am Bestpunkt; S. 273–274: $NPSH_3$-Kriterium und Interpretationsgrenzen. Der angestrebte Bestpunkt des Beispiels ist eine Auslegungsannahme und kein Versuchsergebnis. NPSH_A einer realen Installation ist nicht angegeben.

[13] Gülich, Quelle 1, S. 342 und 348, Tab. 7.1, (T7.1.1): innerer Laufradstrom. Faktor 1,06 ist eine Annahme des Excel-Beispiels.

[14] Gülich, Quelle 1, S. 82, Gl. (3.11); S. 134, Tab. 3.4, (T3.4.15): spezifische Drehzahl, Einheiten und Förderstrom je Saugauge.

[15] Gülich, Quelle 1, S. 46, Gl. (2.3) und (2.4): hydraulische Nutzleistung und Gesamtwirkungsgrad. Der Leistungszuschlag 1,15 ist eine Beispielentscheidung.

[16] Gülich, Quelle 1, S. 74, Gl. (3.3), $P = \omega T$; S. 348, Tab. 7.1, (T7.1.2) zur ersten Wellenabschätzung; S. 660, Torsionsspannung $\tau = 16T/(\pi d^3)$; S. 339, Punkt 7.1.2.10, und S. 342 zum Einfluss der Wellenanforderungen. Vergleichsmoment, Faktoren und M/T-Annahme stammen aus dem Excel-Modell; dafür wurde keine direkte Gülich-Quelle festgestellt.

[17] Gülich, Quelle 1, S. 271 zu k_n; S. 288, Gl. (6.15) und (6.16) mit Iterationsfolge; S. 289, **Abb. 6.21**, normierte Saugkennzahl über Anströmwinkel; S. 290, Gl. (6.16b–c). Bezugswert der spezifischen Drehzahl bei dieser Normierung ist 27.

[18] Gülich, Quelle 1, S. 348, Tab. 7.1, (T7.1.3): erste Abschätzung von Durchmesser beziehungsweise Austrittsgeschwindigkeit mit dem Förderhöhenbeiwert.

[19] Gülich, Quelle 1, S. 132, Tab. 3.2 **Velocity triangle at impeller outlet**: (T3.2.1–3) zu Geschwindigkeit, Fläche und Versperrung, (T3.2.7) zur Umfangskomponente, (T3.2.16) zur Abweichung zwischen Strömungs- und Metallwinkel. Definition von λ als Winkel zwischen Schaufel und Scheibe auf S. XXVII, Skizze in Tab. 0.1 auf S. XXX und Neigungseinfluss auf S. 71. Θ = 4° und die daraus abgeleitete Neigung sind Beispielannahmen, keine Gülich-Beziehung. Die Sensitivität bei λLa = 90° wurde in diesem Beitrag von Hand neu berechnet. S. 78 behandelt die Streuung der Schlupfbeziehung und Grenzen der Vorhersage.

[20] Gülich, Quelle 1, S. XXIII: $d_1m = \sqrt{[(d_1a^2 + d_1i^2)/2]}$; S. 132, Tab. 3.2: (T3.2.4) zu ε_Lim, (T3.2.5) zu k_w und (T3.2.6) zum Schlupf bei $z \geq 3$ mit $f_1 = 0{,}98$ für Radiallaufräder. Der korrigierte Text verwendet die hier definierten Durchmesser $d_1a = 34{,}634648$ mm und $d_1i = 21{,}322$ mm, also $d_1m/d_2 \approx 0{,}27603207 < 0{,}57225140$. BT5 der älteren Arbeitsmappe verwendet dagegen die Wurzel aus dem Produkt von BQ5 und BR5. BQ5 = 38,695789 mm unterscheidet sich vom Eintrittsdurchmesser dieses Texts. Die alte Verhältnisgröße aus BU5, 0,27569451, wird deshalb nicht als Umsetzung von Gülichs Definition übernommen. Im betrachteten Fall bleibt k_w = 1.

[21] Gülich, Quelle 1, S. 74, Gl. (3.4) und (3.5); S. 133, Tab. 3.3, (T3.3.1) und (T3.3.7): Euler-Gleichung und Förderhöhe mit hydraulischem Wirkungsgrad.

[22] Gülich, Quelle 1, S. 131, Tab. 3.1 **Velocity triangle at impeller inlet**, (T3.1.7–9): Versperrung, Strömungswinkel und Schaufelmetallwinkel einschließlich Inzidenz; S. 344–345 zu Bahnen und Meridiangeschwindigkeitsverteilung. K_c = 0,02 ist in CQ5 festgelegt; CR5 und CT5 enthalten die beiden Versperrungsfaktoren als Zahlenwerte. Weder diese Festlegung noch die Herleitung der Faktoren wird einer in den Zellen nachgewiesenen Iteration zugeschrieben.